Matematický KLOKAN 2015

www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

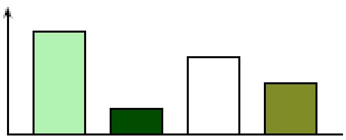
1. Co získáme úpravou výrazu $(a-b)^5 + (b-a)^5$ pro libovolná reálná čísla a, b?

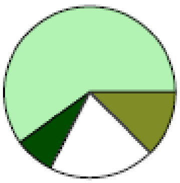
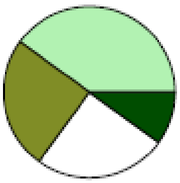
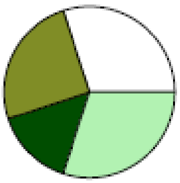
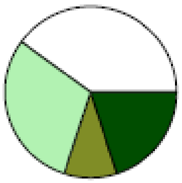
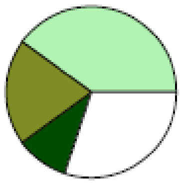
(A) 0 (B) $2(a-b)^5$ (C) $2a^5 - 2b^5$
(D) $2a^5 + 2b^5$ (E) $2a^5 + 10a^4b + 20a^3b^2 + 20a^2b^3 + 10ab^4 + 2b^5$

2. Kolik řešení v oboru reálných čísel má rovnice $2^{2x} = 4^{x+1}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) nekonečně mnoho

3. Dana zaznamenala do sloupcového grafu (vpravo) počty čtyř druhů stromů nalezených při biologické vycházce. Jarda si myslí, že koláčový graf lépe znázorní četnost jejich výskytu. Který z grafů má Jarda nakreslit?

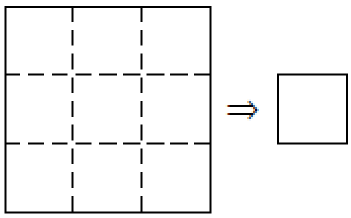


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

4. Sečteme všechna přirozená čísla od 2001 do 2031 a výsledek vydělíme 31. Které číslo dostaneme?

(A) 2012 (B) 2013 (C) 2015 (D) 2016 (E) 2496

5. Čtvercový list papíru na obrázku složíme nějakým způsobem po vyznačených čarách. Z výsledného čtverečku odstřihneme právě jeden vrchol a list opět rozložíme. Kolik děr bude uvnitř papíru?

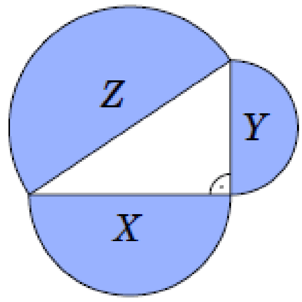


(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 9

6. V osudí je 2015 míčků očíslovaných čísly $1, 2, \ldots, 2015$. Míčky, na kterých jsou čísla se stejným součtem číslic, mají stejnou barvu. Pokud jsou součty číslic na dvou míčcích různé, mají tyto míčky různé barvy. Kolika různými barvami jsou míčky v osudí označeny?

(A) 10 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 2015

7. Na obrázku jsou nad stranami pravoúhlého trojúhelníku sestrojeny tři polokruhy s obsahy $X\,\mathrm{cm}^2$, $Y\,\mathrm{cm}^2$ a $Z\,\mathrm{cm}^2$. Který z následujících výroků je vždy pravdivý?



(A) $X + Y < Z$ (B) $\sqrt{X} + \sqrt{Y} = \sqrt{Z}$ (C) $X^2 + Y^2 = Z^2$
(D) $X^2 + Y^2 = Z$ (E) $X + Y = Z$

8. Vyberte odpověď, která udává všechny možné počty ostrých vnitřních úhlů v konvexním čtyřúhelníku.

(A) $0, 1, 2$ (B) $0, 1, 2, 3$ (C) $0, 1, 2, 3, 4$ (D) $0, 1, 3$ (E) $1, 2, 3$

Úlohy za 4 body

9. Určete hodnotu $\sqrt{(2015 + 2015) + (2015 - 2015) + (2015 \cdot 2015) + (2015 : 2015)}$.

(A) $\sqrt{2015}$ (B) 2015 (C) 2016 (D) 2017 (E) 4030

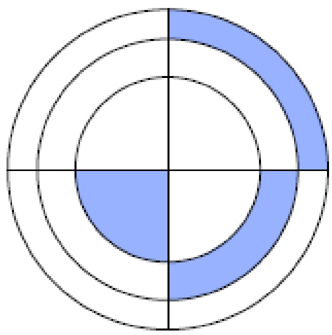
10. Na kolik částí rozdělí rovinu osa x spolu s grafy funkcí $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2 - 1$ v kartézské soustavě souřadnic?

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

11. *Geometrický průměr* n kladných reálných čísel definujeme jako n-tou odmocninu jejich součinu. Na tabuli je napsáno 6 kladných reálných čísel. Geometrický průměr prvních tří je 3, geometrický průměr posledních tří je 12. Kolik je geometrický průměr všech čísel na tabuli?

(A) 4 (B) 6 (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{15}{6}$ (E) 36

12. Na obrázku mají všechny tři vyznačené části mezi soustřednými kružnicemi a jejich kolmými průměry stejný obsah. Poloměr nejmenší kružnice je přitom 1. Určete součin poloměrů všech tří kružnic na obrázku.

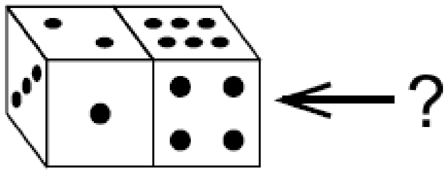


(A) $\sqrt{6}$ (B) 3 (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 6

13. Autosalon koupil dvě auta. První poté prodal se ziskem 40 % a druhé se ziskem 60 %. Jeho celkový zisk z prodeje těchto dvou aut byl 54 %. Určete poměr mezi nákupními cenami obou vozů.

(A) 10:13 (B) 20:27 (C) 7:12 (D) 2:3 (E) 3:7

14. *Standardní kostka* má na každé dvojici protějších stěn celkem 7 bodů. Na obrázku jsou dvě shodné standardní kostky. Kolik bodů je na (skryté) boční stěně označené otazníkem?



(A) právě 5 (B) právě 2 (C) buď 2, nebo 5
(D) buď 1, 2, 3, nebo 5 (E) buď 2, 3, nebo 5

15. Najděte první výrok zleva, který je pravdivý.

(A) „(C) platí“ (B) „(A) platí“ (C) „(E) neplatí“ (D) „(B) neplatí“ (E) „1 + 1 = 2“

16. Na obrázku vidíme tabulku násobení čísel od 1 do 10. Určete součet všech sta součinů v této tabulce.

$\times$	1	2	3	$\cdots$	10
1	1	2	3	$\cdots$	10
2	2	4	6	$\cdots$	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
10	10	20	30	$\cdots$	100

(A) 1000 (B) 2025 (C) 2500 (D) 3025 (E) 5500

Úlohy za 5 bodů

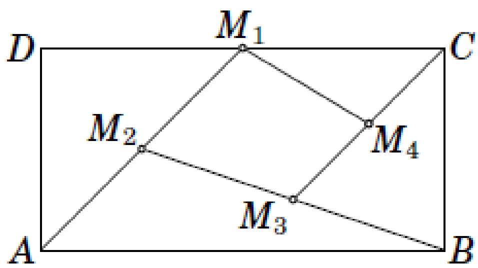
17. Kolik existuje pravoúhlých trojúhelníků ABC s pravým úhlem při vrcholu B takových, že $|AB| = 20$ a délky zbývajících stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

18. Kolik trojmístných čísel můžeme vyjádřit jako součet právě devíti různých nezáporných celých mocnin čísla 2.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

19. Uvažujme pravoúhelník $ABCD$. Označme M_1 střed úsečky DC, M_2 střed úsečky AM_1, M_3 střed úsečky BM_2 a M_4 střed úsečky CM_3. Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $M_1M_2M_3M_4$ a $ABCD$.



(A) 3:16 (B) 7:16 (C) 7:32 (D) 9:32 (E) 1:5

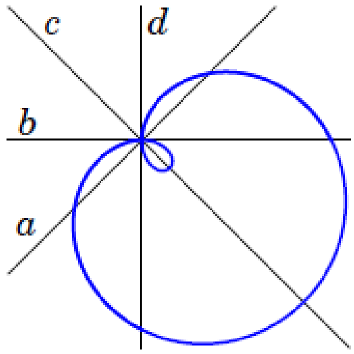
20. Na tabuli jsou nakresleny červené a modré pravoúhelníky. Právě 7 z nich jsou čtverce. Na tabuli je o 3 více červených pravoúhelníků než modrých čtverců. Také je tam o 2 více červených čtverců než modrých pravoúhelníků. Kolik modrých pravoúhelníků je na tabuli.

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 10

21. Kolik typů pravidelných mnohoúhelníků má velikosti vnitřních úhlů ve stupních vyjádřeny přirozenými čísly?

(A) 17 (B) 18 (C) 22 (D) 25 (E) 60

22. Na obrázku je v kartézské soustavě souřadnic množina všech bodů (x, y) vyhovujících rovnici



$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Která z přímek a, b, c, d znázorňuje osu y?

(A) a (B) b (C) c
(D) d (E) žádná z nich

23. 96 členů počtářského klubu vytvořilo velkou kružnici. Jedním směrem se začnou odpočítávat 1, 2, 3 atd. Každý člen, který řekne sudé číslo, z kružnice odstoupí. Tímto způsobem pokračují dále začínajíce druhé kolo od 97 a skončí, až v kružnici zůstane poslední člen. Které číslo řekl tento člen v 1. kole?

(A) 1 (B) 17 (C) 33 (D) 65 (E) 95

24. Bob a Bobek nahradili ve slově *KANGAROO* písmena číslicemi tak, že výsledné číslo je dělitelné 11. Různá písmena nahradili různými číslicemi, stejná písmena nahradili stejnými číslicemi ($K \neq 0$). Bob takto získal největší možné číslo a Bobek nejmenší možné číslo. Přitom oba jedno písmeno nahradili stejnou číslicí. Kterou?

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6