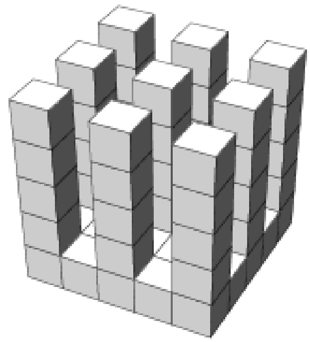
Matematický KLOKAN 2014

www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

1. Z krychle o rozměrech 5×5×5 jsme odebrali jednotkové krychličky, zbyly pilíře stejné výšky stojící na rovné základně jako na obrázku. Kolik krychliček jsme odebrali?



(A) 56 (B) 60 (C) 64 (D) 68 (E) 80

2. Kája, Eliška a Lucka slaví narozeniny ve stejný den. Jako každý rok dostaly společný dort, na kterém je napsán součet jejich věků. Letos je to 44. Které číslo tam bude napsáno příště, až to bude opět dvojmístné číslo zapsané týmiž číslicemi?

(A) 55 (B) 66 (C) 77 (D) 88 (E) 99

3. Určete hodnotu

$$\frac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}.$$

(A) 1 (B) 2 (C) 2^{2011} (D) 2^{2012} (E) 2^{2013}

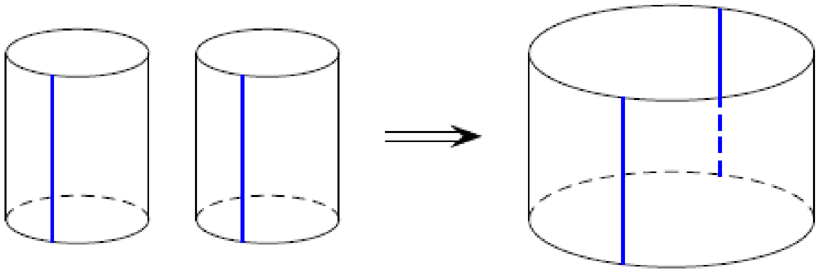
4. Kolika číslicemi zapíšeme hodnotu výrazu $\left(2^{22}\right)^5\cdot\left(5^{55}\right)^2$?

(A) 22 (B) 55 (C) 77 (D) 110 (E) 111

5. Hezoun Harry má tajný e-mailový účet, o kterém vědí jen čtyři jeho přátelé. Dnes na něj dostal 8 zpráv. Které z následujících tvrzení je jistě pravdivé?

(A) Harry dostal od každého svého přítele dvě zprávy.
(B) Harry nedostal od žádného svého přítele osm zpráv.
(C) Harry dostal od každého svého přítele aspoň jednu zprávu.
(D) Harry dostal od některých svých dvou přátel aspoň dvě zprávy.
(E) Harry dostal od některého svého přítele aspoň dvě zprávy.

6. Pláště dvou shodných válců jsme rozřízli podél vyznačených čar a spojili do pláště většího válce (viz obrázek). Vypočtěte podíl objemů většího a jednoho z původních válců.



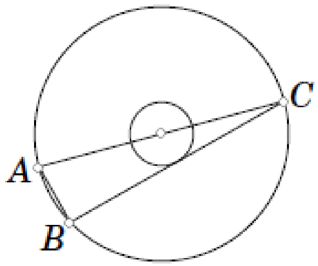
(A) 2 (B) 3 (C) π (D) 4 (E) 8

7. V zápise roku 2014 jsou navzájem různé číslice, přičemž poslední číslice je větší než součet tří předcházejících. Před kolika lety nastala naposled stejná situace?

(A) 5 (B) 215 (C) 305 (D) 359 (E) 485

8. Dvě soustředné kružnice (jako na obrázku) mají poloměry v poměru 3:1. Úsečka AC je průměrem větší kružnice, úsečka BC je její tětivou, která se dotýká menší kružnice, a délka úsečky AB je 12. Vypočtěte poloměr větší kružnice.

(A) 13 (B) 18 (C) 21 (D) 24 (E) 26



Úlohy za 4 body

9. Na tabuli je napsáno deset navzájem různých přirozených čísel. Právě pět z nich je dělitelných 5 a právě sedm z nich je dělitelných 7. Označme M největší z čísel na tabuli. Najděte nejmenší možnou hodnotu M.

(A) 105 (B) 77 (C) 75 (D) 63 (E) jiné číslo

10. Ve fotbalovém utkání získá vítěz 3 body, prohrávající 0 bodů a v případě remízy obě družstva po 1 bodu. Fotbalového turnaje se zúčastnila čtyři družstva A, B, C, D, přičemž každá dvě družstva se spolu utkala právě jednou. Družstvo A získalo na konci turnaje 7 bodů a družstva B a C získala po 4 bodech. Kolik bodů získalo družstvo D?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

11. Kolik trojic (a, b, c) přirozených čísel vyhovuje současně podmínkám

$$a > b > c > 1 \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1?$$

(A) žádná (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) více než 3

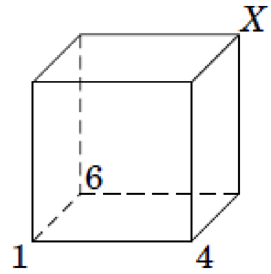
12. Pro nenulová reálná čísla a, b, c a přirozené číslo n jsou buď obě čísla $(-2)^{2n+3}a^{2n+2}b^{2n-1}c^{3n+2}$ a $(-3)^{2n+2}a^{4n+1}b^{2n+5}c^{3n-4}$ kladná, nebo jsou obě záporná. Které z následujících tvrzení je jistě pravdivé?

(A) $a > 0$ (B) $b > 0$ (C) $c > 0$ (D) $a < 0$ (E) $b < 0$

13. Šest týdnů je $n!$ sekund. Určete n.

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 12

14. Vrcholy krychle očíslujte od 1 do 8 tak, aby součty čísel u vrcholů každé ze stěn byly stejné. Na obrázku jsou již čísla 1, 4 a 6 přiřazena. Kterým číslem bude označen vrchol X?

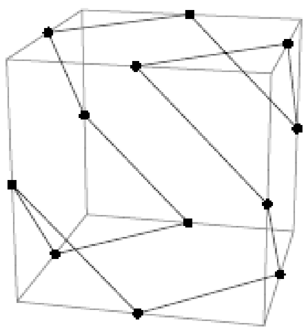


(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

15. Na obalu sýru je napsáno: „Obsahuje 24 % tuku. Obsahuje 64 % tuku v sušině.“ Sušina zbyde, když sýr zbavíme vody. Kolik procent vody obsahuje sýr?

(A) 88 % (B) 62,5 % (C) 49 % (D) 42 % (E) 37,5 %

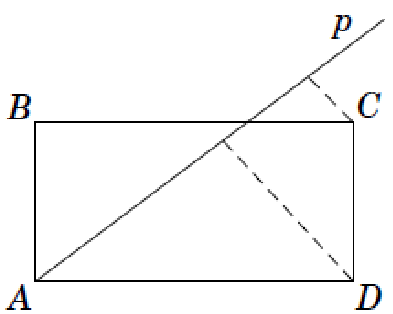
16. Na obrázku je uzavřená lomená čára, jejíž vrcholy leží ve středech hran krychle. *Vnitřním úhlem* lomené čáry budeme rozumět úhel, který svírají její dvě sousední úsečky ve společném bodě. Určete součet všech vnitřních úhlů této uzavřené lomené čáry.



(A) 720° (B) 1080° (C) 1200° (D) 1440° (E) 1800°

Úlohy za 5 bodů

17. Vrcholem A obdélníku $ABCD$ na obrázku prochází přímka p. Vzdálenosti bodů C a D od přímky p jsou po řadě 2 a 6. Strana AD je dvakrát delší než strana AB. Určete délku strany AD.

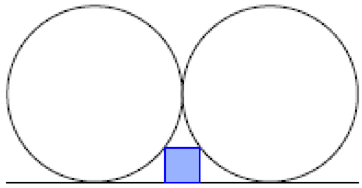


(A) $4\sqrt{3}$ (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

18. Každý z 9 klokanů je buď zlatý, nebo stříbrný. Když se náhodně potkají tři klokani, s pravděpodobností $2/3$ mezi nimi nebude žádný stříbrný. Kolik klokanů je zlatých?

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

19. Na obrázku je čtverec, jehož dvěma vrcholy procházejí dotýkající se shodné kružnice s poloměrem 1. Zbývajícími dvěma vrcholy prochází společná tečna obou kružnic. Vypočtěte délku strany tohoto čtverce.



(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{5}$

20. Tomáš má napsat na tabuli co nejvíce navzájem různých přirozených čísel menších nebo rovných 100 tak, aby jejich součin *nebyl* dělitelný 54. Kolik čísel Tomáš napíše?

(A) 8 (B) 17 (C) 68 (D) 69 (E) 90

21. V opačných polorovinách určených přímkou AB leží dva pravidelné mnohoúhelníky se společnou stranou AB délky 1. Jeden je pravidelný 15úhelník $ABCD\ldots$ a druhý pravidelný n-úhelník $ABZY\ldots$ Pro které n je vzdálenost $|CZ|$ rovna 1?

(A) 10 (B) 12 (C) 15 (D) 16 (E) 18

22. Kolik trojic přirozených čísel (k, m, n) vyhovuje rovnicím

$$k = (2014 + m)^{\frac{1}{n}} = 1024^{\frac{1}{n}} + 1?$$

(A) žádná (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) alespoň 4

23. Funkce f vyhovuje podmínkám $f(4) = 6$ a $xf(x) = (x - 3)f(x + 1)$. Určete hodnotu $f(4)f(7)f(10)\ldots f(2011)f(2014)$.

(A) 2013 (B) 2014 (C) $2013 \cdot 2014$ (D) 2013! (E) 2014!

24. Na ostrově žijí tři druhy zvířat: lvi, vlci a kozy. Vlci žerou jen kozy, lvi žerou jen vlky nebo kozy. Jelikož ostrov je kouzelný, když vlk sežere kozu, stane se lvem. Když lev sežere kozu, stane se vlkem a když lev sežere vlka, stane se kozou. Původně bylo na ostrově 17 koz, 55 vlků a 6 lvů. Po určité době nastala situace, že žádné ze zvířat na ostrově nemohlo sežrat žádné jiné. Určete největší možný počet zvířat, který mohl na ostrově zůstat.

(A) 1 (B) 6 (C) 17 (D) 23 (E) 35