



Úlohy za 3 body

1. Závodu se zúčastnili Michael, Fernando a Sebastian. Ihned po startu vedl Michael, druhý byl Fernando a třetí Sebastian. Během závodu si pak Michael a Fernando vyměnili pořadí devětkrát, Fernando a Sebastian desekrát, Sebastian a Michael jedenáctkrát. V jakém pořadí dojeli do cíle?

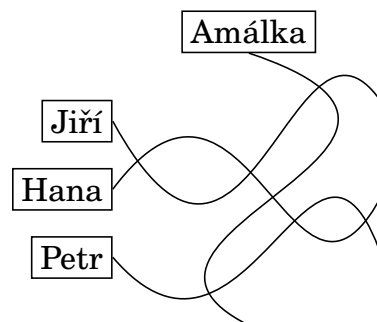
- (A) Michael, Fernando, Sebastian
- (B) Sebastian, Michael, Fernando
- (C) Sebastian, Fernando, Michael
- (D) Fernando, Michael, Sebastian
- (E) Fernando, Sebastian, Michael

2. Pro reálná čísla  $x$  a  $y$  platí  $2^x = 15$  a  $15^y = 32$ . Určete hodnotu součinu  $xy$ .

- (A) 5
- (B)  $\log_2 15 + \log_{15} 32$
- (C)  $\log_2 47$
- (D) 7
- (E)  $\sqrt{47}$

3. Během plavby po rozbouřeném moři se Jana pokusila nakreslit plán své vesnice. Nakreslila čtyři ulice, jejich sedm křižovatek a domy svých přátel. Ve skutečnosti jsou však Rovná ulice, Hřebíková ulice a Pravítková ulice přímé. Čtvrtá ulice se jmenuje Křivá. Kdo v ní bydlí?

- (A) Hana
- (B) Petr
- (C) Jiří
- (D) Amálka
- (E) nelze určit bez lepšího plánu

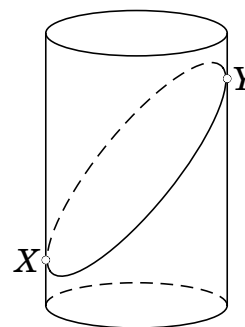


4. Všechna čtyřmístná čísla se součtem číslic 4 jsou seřazena od největšího k nejmenšímu. Kolikáté je číslo 2011?

- (A) 6.
- (B) 7.
- (C) 8.
- (D) 9.
- (E) 10.

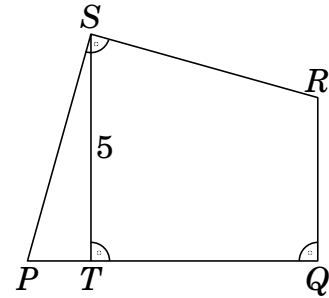
5. Obdélníkový list papíru byl obtočen kolem válce. Poté jsme válec s papírem rozřízli rovinným řezem procházejícím body  $X$  a  $Y$  dle obrázku. Dolní část papíru byla narovnána. Který z útvarů na obrázcích jsme mohli získat?

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)



6. Na obrázku je čtyřúhelník  $PQRS$ , v němž platí  $|PS| = |SR|$ ,  $|\sphericalangle PSR| = |\sphericalangle PQR| = 90^\circ$ ,  $ST \perp PQ$  a  $|ST| = 5$ . Určete obsah čtyřúhelníku  $PQRS$ .

(A) 20      (B) 22,5      (C) 25      (D) 27,5      (E) 30



7. Andrea napsala na tabuli všechna lichá čísla od 1 do 2011. Bára poté smazala všechny násobky tří. Kolik čísel zůstalo na tabuli?

(A) 335      (B) 336      (C) 671      (D) 1005      (E) 1006

8. Max a Hugo házejí několika hracími kostkami aby rozhodli, který z nich má skočit do ledového jezera. Jestliže nepadne žádná šestka, bude to Max; jestliže padne právě jedna šestka, bude to Hugo; jestliže padnou šestky aspoň dvě, neskočí ten den do jezera nikdo. Kolika kostkami házejí, jestliže oba mají stejnou pravděpodobnost skočit do jezera?

(A) 3      (B) 5      (C) 8      (D) 9      (E) 17

Úlohy za 4 body

9. Ze tří obdélníků byl sestaven bez překrývání a mezer pravoúhelník. První z obdélníků měl rozměry  $7 \times 11$ , druhý  $4 \times 8$ . Třetí z obdélníků byl zvolen tak, aby výsledný pravoúhelník měl největší možný obsah. Určete rozměry třetího obdélníku.

(A)  $1 \times 11$       (B)  $3 \times 4$       (C)  $3 \times 8$       (D)  $7 \times 8$       (E)  $7 \times 11$

10. Michal chce vyplnit políčka tabulky  $3 \times 3$  celými čísly tak, aby hodnota součtu všech čísel v každém čtverci  $2 \times 2$  byla 10. Čtyři čísla už jsou zapsána. Které z následujících čísel může udávat hodnotu součtu zbývajících pěti čísel.

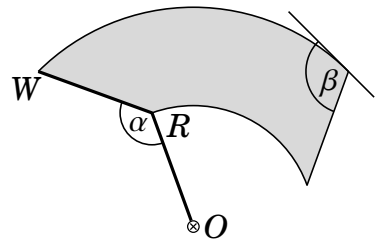
	2	
1		3
	4	

(A) 9      (B) 10      (C) 12  
(D) 13      (E) žádná z možností (A)–(D)

11. Na výlet šlo 48 dětí. Šest z nich šlo s právě jedním sourozencem, devět dětí šlo právě s dvěma sourozenci a čtyři děti šly právě se třemi sourozenci. Zbytek dětí na výletě sourozence neměl. Z kolika rodin byly děti, které šly na výlet?

(A) 12      (B) 19      (C) 25      (D) 31      (E) 36

12. Stěrač čelního skla auta je sestaven tak, že stěrka  $RW$  a raménko  $OR$  mají stejnou délku a svírají pevný úhel velikosti  $\alpha$ . Stěrač se se otáčí kolem bodu  $O$  a stírá vyznačenou plochu. Určete velikost úhlu  $\beta$ , který svírá pravá strana stírané plochy s tečnou k jejímu hornímu okraji.



- (A)  $135^\circ - \alpha$     (B)  $45^\circ + \alpha$     (C)  $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$     (D)  $135^\circ - \frac{\alpha}{2}$     (E)  $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$

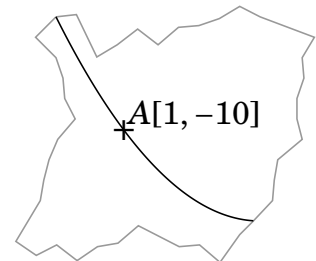
13. Bratři Alois a Bedřich pravdivě odpověděli na otázky týkající se jejich společného šachového klubu. Alois prohlásil: „Všichni členové našeho klubu s výjimkou pěti dívek jsou chlapci.“ Bedřich pravil: „Mezi libovolnými šesti členy našeho klubu jsou alespoň čtyři dívky.“ Kolik členů má šachový klub?

- (A) 6    (B) 7    (C) 8    (D) 12    (E) 18

14. V osudí je několik míčků. Na každém míčku je napsáno jedno přirozené číslo; všechna čísla jsou navzájem různá. Čísla dělitelná 6 jsou napsána na 30 míčcích, čísla dělitelná 7 jsou na 20 míčcích a čísla dělitelná 42 jsou na 10 z nich. Určete nejmenší možný počet míčků, které mohou být v osudí.

- (A) 30    (B) 40    (C) 53    (D) 54    (E) 60

15. Na tabuli byla nakreslena (v kartézské soustavě souřadnic s obvyklou polohou os  $x$  a  $y$ ) parabola  $y = ax^2 + bx + c$  a na ní vyznačen bod  $A[1, -10]$ . Po smazání části tabule (včetně os) zůstala pouze část na obrázku. Které z následujících tvrzení může být nepravdivé?



- (A)  $a > 0$     (B)  $b < 0$     (C)  $a + b + c < 0$   
 (D)  $b^2 > 4ac$     (E)  $c < 0$

16. Ve výrazu

$$\frac{K \times A \times N \times G \times A \times R \times O \times O}{G \times A \times M \times E}$$

značí různá písmena různé číslice, stejná písmena stejné číslice. Najděte nejmenší možnou kladnou celočíselnou hodnotu, kterou tento výraz může nabýt.

- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 5    (E) 7

Úlohy za 5 bodů

17. Všechny strany šestiúhelníku  $PQRSTU$  se dotýkají téže kružnice. Délky stran  $PQ$ ,  $QR$ ,  $RS$ ,  $ST$  a  $TU$  jsou po řadě 5, 6, 7, 8 a 9. Vypočtěte délku strany  $UP$ .

- (A) 8    (B) 7    (C) 6  
 (D) 1    (E) nelze z daných informací určit

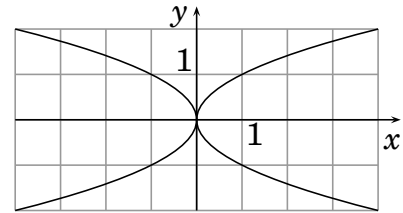
18. Grafy kolika z funkcí  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ , kde

$$f_1: y = x^2, \quad f_2: y = -x^2, \quad f_3: y = \sqrt{x}, \quad f_4: y = -\sqrt{x},$$

$$f_5: y = \sqrt{-x}, \quad f_6: y = -\sqrt{-x}, \quad f_7: y = \sqrt{|x|}, \quad f_8: y = -\sqrt{|x|}$$

můžeme vidět na obrázku?

- (A) žádné                      (B) 2                      (C) 4  
(D) 6                      (E) všech 8



19. Najděte součet všech přirozených čísel  $x$  menších než 100, pro která je číslo  $x^2 - 81$  dělitelné 100.

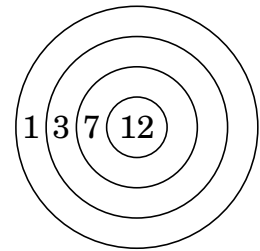
- (A) 200                      (B) 100                      (C) 90                      (D) 81                      (E) 50

20. Posloupnost reálných funkcí  $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$  vyhovuje pro každé reálné číslo  $x$  následujícím dvěma podmínkám:  $f_1(x) = x$  a  $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$  pro přirozená čísla  $n$ . Najděte  $f_{2011}(2011)$ .

- (A) 2011                      (B)  $-\frac{1}{2010}$                       (C)  $\frac{2010}{2011}$                       (D) 1                      (E) -2011

21. Robin Hood vystřelil tři šípy do terče na obrázku; čísla udávají počet bodů za zásah vyznačené oblasti. Všemi šípy zasáhl cíl. Vyznačte počet všech různých hodnot součtů bodů, které mohl získat.

- (A) 13                      (B) 17                      (C) 19                      (D) 20                      (E) 21



22. Necht'  $a, b, c$  jsou přirozená čísla taková, že  $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ . Zjistěte nejmenší možný počet dělitelů jejich součinu  $abc$  (včetně 1 a  $abc$ ).

- (A) 30                      (B) 49                      (C) 60                      (D) 77                      (E) 1596

23. Do políček tabulky  $4 \times 5$  je zapsáno 20 navzájem různých přirozených čísel. Čísla na libovolných dvou sousedních políčkách (políčka se společnou stranou) mají společného dělitele většího než 1. Označme  $n$  největší číslo zapsané do tabulky. Najděte nejmenší možnou hodnotu  $n$ .

- (A) 21                      (B) 24                      (C) 25                      (D) 26                      (E) 40

24. Krychle  $3 \times 3 \times 3$  je složena z 27 stejných malých krychlí. Rovina kolmá k tělesové úhlopříčce velké krychle prochází jejím středem. Kolik malých krychlí tato rovina protíná?

- (A) 17                      (B) 18                      (C) 19                      (D) 20                      (E) 21