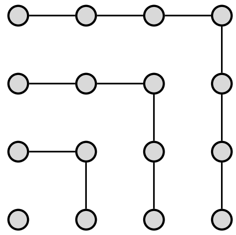
Matematický KLOKAN 2010
www.matematickyklokan.net

kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

1. Pomocí obrázku vpravo zjistíte, že $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \cdot 4$. Najděte hodnotu součtu



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17.$$

(A) $14 \cdot 14$ (B) $9 \cdot 9$ (C) $4 \cdot 4 \cdot 4$ (D) $16 \cdot 16$ (E) $7 \cdot 9$

2. Dvě prázdné krychlové nádoby mají podstavy s obsahy $1\,\mathrm{dm}^2$ a $4\,\mathrm{dm}^2$. Máte naplnit vodou větší krychli pomocí menší krychle. Kolikrát budete muset s menší krychlí jít pro vodu?

(A) $2\times$ (B) $4\times$ (C) $6\times$ (D) $8\times$ (E) $16\times$

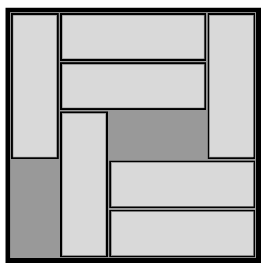
3. Kolik čtyřmístných čísel s desítkovým zápisem tvořeným pouze lichými číslicemi je dělitelných pěti?

(A) 900 (B) 625 (C) 250 (D) 125 (E) 100

4. Ředitel společnosti prohlásil: „Každý z našich zaměstnanců má alespoň 25 let.“ Později se zjistilo, že neměl pravdu. To znamená, že:

(A) Všichni zaměstnanci mají právě 25 let.
(B) Všichni zaměstnanci jsou starší než 26 let.
(C) Žádný ze zaměstnanců ještě neměl 26 let.
(D) Některý ze zaměstnanců ještě neměl 25 let.
(E) Některý ze zaměstnanců má právě 26 let.

5. V krabici je umístěno sedm čokoládových tyčinek 3×1 stejně jako na obrázku. Určete nejmenší počet tyčinek, které musíme posunout, aby vzniklo místo pro další takovou tyčinku.



(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 5 (E) Tyčinky takto posunout nemůžeme.

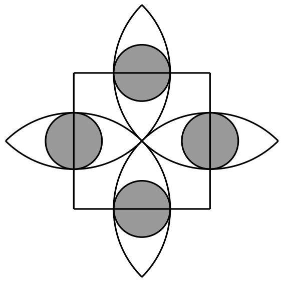
6. Kolik existuje dvojmístných čísel $\overline{xy}$ zapsaných v desítkové soustavě číslicemi x a y, pro něž platí $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$?

(A) 1 (B) 2 (C) 6 (D) 32 (E) žádné

7. Pro celá čísla x a y platí $2x = 5y$. Pouze jedno z následujících čísel je možnou hodnotou součtu $x + y$. Které?

(A) 2 011 (B) 2 010 (C) 2 009 (D) 2 008 (E) 2 007

8. Délky stran čtverce na obrázku jsou 2, polokružnice procházejí středem čtverce a mají středy v jeho vrcholech. Vyznačené kruhy mají středy na stranách čtverce a dotýkají se polokružnic. Určete obsah všech vyznačených kruhů.



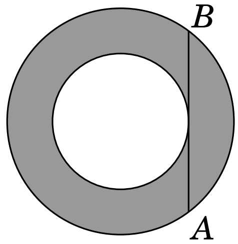
(A) $4(3-2\sqrt{2})\pi$ (B) $\sqrt{2}\pi$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$
(D) π (E) $\frac{1}{4}\pi$

Úlohy za 4 body

9. Čísla $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ jsou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Vypočtěte její následující člen.

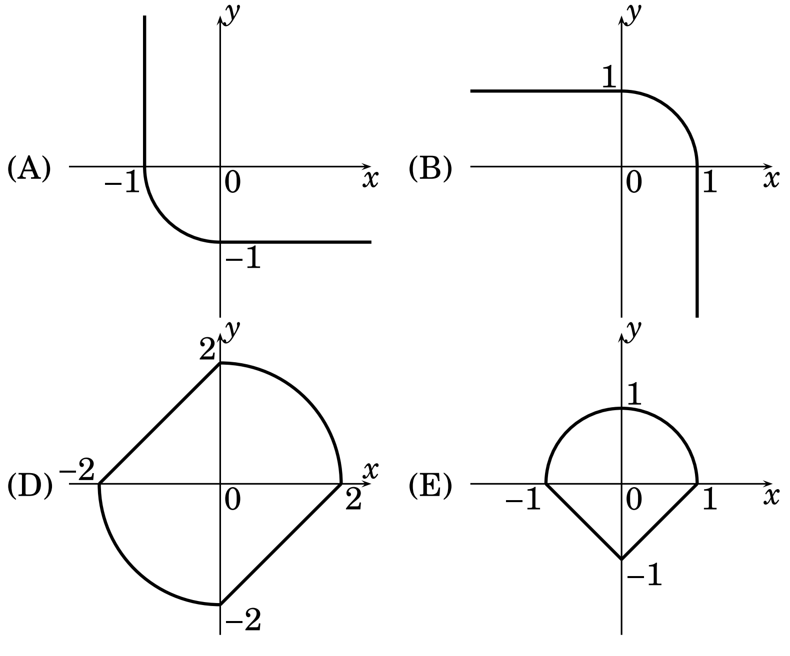
(A) $\sqrt[9]{7}$ (B) $\sqrt[12]{7}$ (C) $\sqrt[5]{7}$ (D) $\sqrt[10]{7}$ (E) 1

10. Tětiva AB je tečnou menší ze dvou soustředných kružnic. Platí $|AB| = 16$. Určete obsah vyznačeného mezikruží.



(A) 32π (B) 63π (C) 64π
(D) $32\pi^2$ (E) Nelze jednoznačně určit.

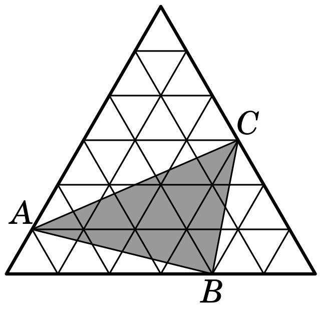
11. Který z následujících grafů znázorňuje množinu dvojic (x, y) reálných čísel vyhovujících rovnici $(x-|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 4$?



12. Kolik pravoúhlých trojúhelníků má všechny vrcholy totožné s některými vrcholy daného pravidelného čtrnáctiúhelníku?

(A) 42 (B) 84 (C) 88 (D) 98 (E) 168

13. Velký rovnostranný trojúhelník na obrázku je sestaven ze 36 shodných malých rovnostranných trojúhelníků o obsahu $1\,\text{cm}^2$. Zjistěte obsah trojúhelníku ABC.

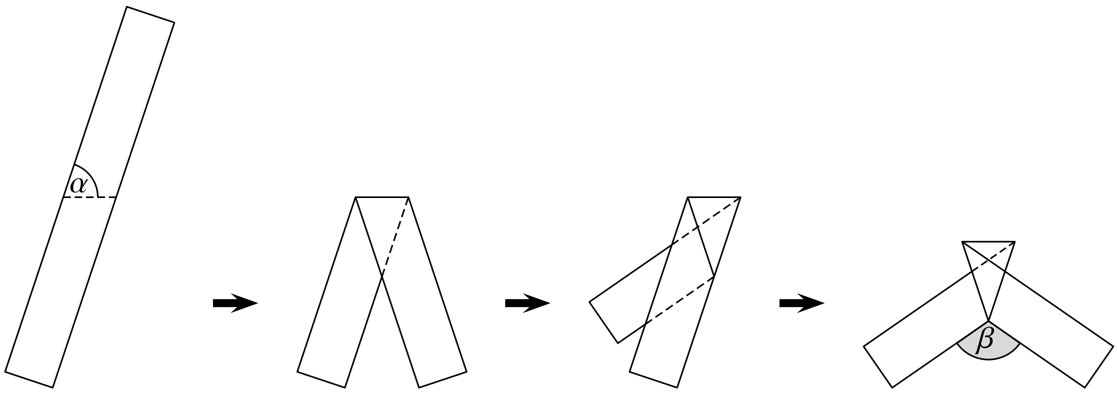


(A) $11\,\text{cm}^2$ (B) $12\,\text{cm}^2$ (C) $13\,\text{cm}^2$ (D) $14\,\text{cm}^2$ (E) $15\,\text{cm}^2$

14. Každou hvězdičku výrazu $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ můžeme nahradit buď znaménkem „+“, nebo „·“. Nechť N je největší možná hodnota, kterou takto můžeme získat. Které z následujících čísel je nejmenším možným prvočíselným dělitelem čísla N?

(A) 2 (B) 3 (C) 5
(D) 7 (E) jiné prvočíslo

15. Papírový proužek je třikrát přeložen podle obrázku. Vypočtěte β, je-li $\alpha = 70°$.



(A) 140° (B) 130° (C) 120° (D) 110° (E) 100°

16. V lyžařském závodě doběhlo 100 účastníků, přitom žádní dva neskončili se stejným časem. Každý v cíli odpověděl na otázku: „Na kterém místě jste skončil?“ číslem od 1 do 100. Součet všech odpovědí je 4 000. Najděte nejmenší možný počet špatných odpovědí.

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Úlohy za 5 bodů

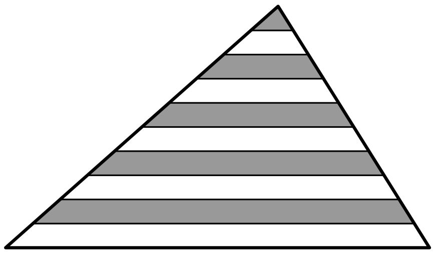
17. Nechť funkce f zobrazuje množinu kladných reálných čísel do množiny reálných čísel a pro každé kladné reálné číslo x platí $2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$. Vypočtěte $f(6)$.

(A) 993 (B) 1 (C) 2 009 (D) 1 013 (E) 923

18. Hodnotu výrazu $\sqrt{0,\underbrace{444\ldots4}_{100\text{krát}}}$ zapíšeme desetinným rozvojem. Která číslice je na 100. místě za desetinnou čárkou?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

19. Úsečky rovnoběžné s jednou ze stran trojúhelníku na obrázku dělí zbývající strany na deset shodných částí. Kolik procent trojúhelníku je obarveno?

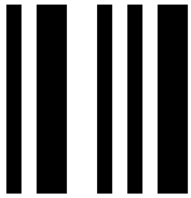


(A) 42,5 % (B) 45 % (C) 46 %
(D) 47,5 % (E) 50 %

20. Třikrát hodíme standardní hrací kostkou. Při třetím hodu padne číslo, které je součtem čísel padlých v prvních dvou hodech. Určete pravděpodobnost, že při alespoň jednom hodu padne číslo 2.

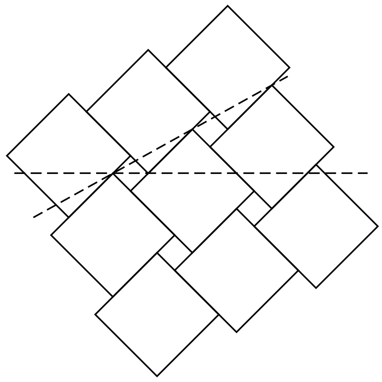
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{91}{216}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{8}{15}$ (E) $\frac{7}{12}$

21. Čárový kód vznikne pravidelným střídáním černých a bílých pruhů, přitom vždy začíná a končí černým pruhem. Každý pruh (černý nebo bílý) má šířku 1 nebo 2, celková šířka kódu je 12 (viz obr.). Kolik různých kódů (čtených zleva doprava) takto může vzniknout?



(A) 24 (B) 132 (C) 66 (D) 12 (E) 116

22. Mozaika na obrázku je sestavena ze dvou druhů čtverců, větší z nich má stranu délky a, menší b. Čárkované přímky (vodorovná a šikmá) svírají úhel 30°. Určete poměr $a : b$.



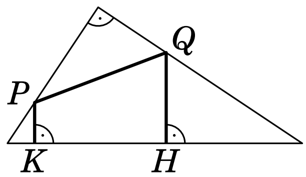
(A) $(2\sqrt{3}) : 1$ (B) $(2+\sqrt{3}) : 1$ (C) $(3+\sqrt{2}) : 1$
(D) $(3\sqrt{2}) : 1$ (E) $2 : 1$

23. Určete hodnotu výrazu

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

(A) 2^{2048} (B) 2^{4096} (C) 3^{2048}
(D) 2^{4096} (E) $2^{2048}+3^{2048}$

24. Nechť P a Q jsou libovolné body ležící na různých odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku délek a a b. Označme K a H paty kolmic po řadě z bodů P a Q k přeponě tohoto trojúhelníku. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $|KP| + |PQ| + |QH|$.



(A) $a+b$ (B) $\dfrac{2ab}{a+b}$ (C) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (D) $\dfrac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (E) $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}$