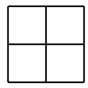
**Matematický KLOKAN 2008**

kategorie **Student**

## Úlohy za 3 body

**1.** Do políček tabulky 2×2 jsou vepsána čísla 3, 4 a dále dvě neznámá čísla. Součty čísel v jednotlivých řádcích jsou 5 a 10, součet čísel v jednom ze sloupců je 9. Určete větší ze dvou neznámých čísel.



(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

**2.** Nechť pro reálná čísla $x$ ($x \neq 0$) a $y$ platí $x + y = 0$. Hodnota zlomku $\dfrac{x^{2008}}{y^{2008}}$ je:

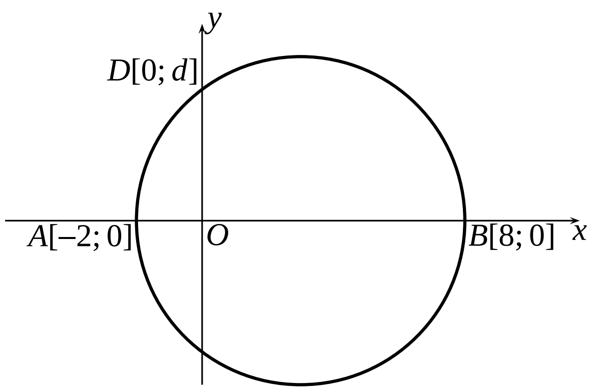
(A) $-1$ (B) 0 (C) 1 (D) $2^{2008}$ (E) $\dfrac{x}{y}$

**3.** Obdélníková tabulka se skládá z 21 sloupců očíslovaných 1, 2, . . . , 21 a 33 řádků očíslovaných 1, 2, . . . , 33. Odstraníme řádky, jejichž čísla nejsou dělitelná třemi, a sloupce, jejichž čísla jsou sudá. Kolik polí bude mít výsledná tabulka?

(A) 110 (B) 121 (C) 115,5 (D) 119 (E) 242

**4.** Kružnice na obrázku má průměr $AB$ a prochází bodem $D$. Hodnota $d$ je:

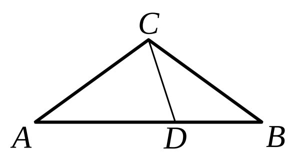
(A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4
(D) 5 (E) 6




**5.** Určete počet všech prvočísel $p$ s vlastností: Číslo $p^4 + 1$ také prvočíslo.

(A) žádné (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) nekonečně mnoho

**6.** Na základně $AB$ rovnoramenného trojúhelníku $ABC$ leží bod $D$ tak, že platí $|AD| = |AC|$ a $|DB| = |DC|$. Určete velikost úhlu $ACB$.

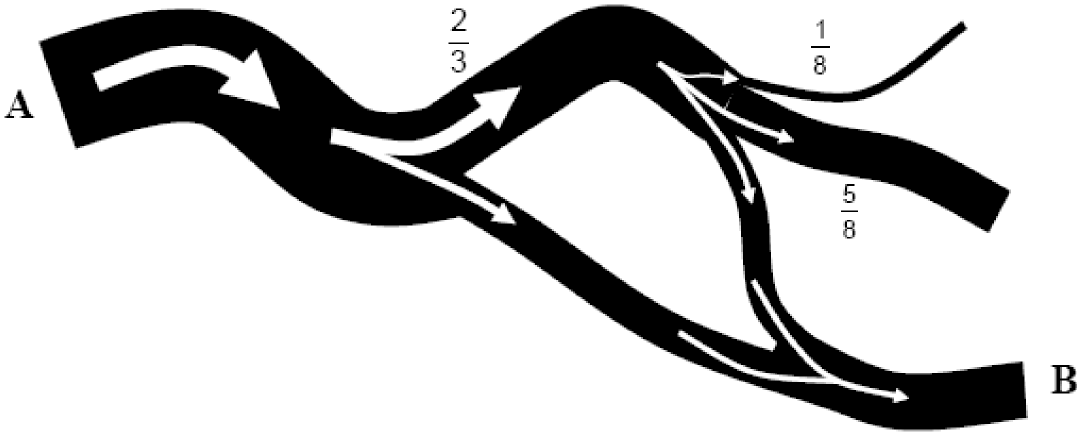



(A) 98° (B) 100° (C) 104° (D) 108° (E) 110°

**7.** Čitatel i jmenovatel zlomku jsou záporná čísla, přitom čitatel je větší než jmenovatel. Který z následujících výroků je pravdivý?

(A) Hodnota zlomku je menší než –1.
(B) Hodnota zlomku leží mezi –1 a 0.
(C) Hodnota zlomku je kladné číslo menší než 1.
(D) Hodnota zlomku je číslo větší než 1.
(E) Hodnota zlomku může být jak kladná, tak i záporná.

**8.** Řeka protéká bodem *A*. Potom se rozděluje na dvě ramena (viz obrázek). Prvním protékají $\frac{2}{3}$ vody, druhým zbytek. První rameno se dále dělí na tři kanály, prvním z nich protéká $\frac{1}{8}$ vody z ramene, druhým $\frac{5}{8}$ a třetím zbytek. Třetí kanál se dále vlévá do druhého ramene. Kolik říční vody protéká bodem *B*?




(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{1}{4}$

**Úlohy za 4 body**

**9.** Na přímce leží pět navzájem různých bodů $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ v tomto pořadí. (Vzdálenosti mezi jednotlivými body mohou být navzájem různé.) Pro jistý bod *P* této přímky je součet vzdáleností $|PA_1| + |PA_2| + |PA_3| + |PA_4| + |PA_5|$ minimální. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

(A) $P = A_1$
(B) $P = A_2$
(C) $P = A_3$
(D) *P* je libovolný bod úsečky $A_2A_4$
(E) *P* je libovolný bod úsečky $A_1A_5$

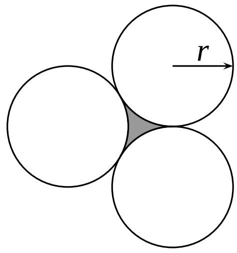
**10.** Najděte největší hodnotu funkce $f(x) = |5\sin x - 3|$ na množině reálných čísel.

(A) 2 (B) 3 (C) π (D) 5π (E) 8

**11.** Je dáno sedm čísel –9; 0; –5; 5; –4; –1; –3. Šest z nich rozdělíme do skupin po dvou tak, aby součty čísel v každé skupině byly stejné. Které číslo zbyde?

(A) 5 (B) 0 (C) –3 (D) –4 (E) –5

**12.** Tři shodné kružnice na obrázku se navzájem dotýkají. Označme $r$ jejich poloměr. Určete obsah šedého obrazce.

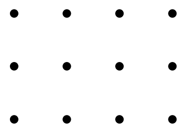



(A) $\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\pi\right) r^2$ (B) $\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2$ (C) $\frac{1}{8}\pi r^2$
(D) $\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right) \pi r^2$ (E) $\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) r^2$

**13.** V matematické soutěži řešili studenti pět úloh. Úlohy měly různou obtížnost, byly proto hodnoceny navzájem různým počtem bodů (vyjádřeným přirozeným číslem). Jindra vyřešil všech pět úloh, za dvě nejméně hodnocené získal 10 bodů a za dvě nejlépe hodnocené získal 18 bodů. Kolik bodů Jindra obdržel dohromady?

(A) 30 (B) 32 (C) 34 (D) 35 (E) 40

**14.** Určete pravděpodobnost jevu, že tři body náhodně vybrané ze sítě bodů na obrázku leží na téže přímce.

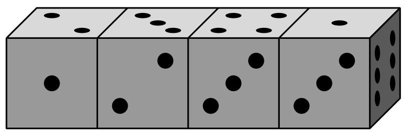


(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{11}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{8}$ (E) $\frac{3}{12}$

**15.** Nechť pro reálná čísla $x$, $y$, $z$ současně platí $x^2yz^3 = 7^3$ a $xy^2 = 7^9$. Hodnota $xyz$ je:

(A) $7^4$ (B) $7^6$ (C) $7^8$ (D) $7^9$ (E) $7^{10}$

**16.** Na obrázku jsou čtyři shodné kostky položené v řadě. Každá kostka má stěny označené 1, 2, 3, 4, 5 a 6 body, nejedná se však o „standardní" hrací kostky, tj. součty bodů na protějších stěnách nemusí být 7. Určete součet bodů na jejich šesti dotýkajících se stěnách.



(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 23

**Úlohy za 5 bodů**

**17.** Délky hran kvádru uvedené v centimetrech jsou přirozená čísla a tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 2$. Které z následujících čísel může vyjadřovat objem tohoto kvádru?

(A) $120\,\text{cm}^3$ (B) $188\,\text{cm}^3$ (C) $216\,\text{cm}^3$ (D) $350\,\text{cm}^3$ (E) $500\,\text{cm}^3$

**18.** V zápise násobení dvou čísel nahraďte každou hvězdičku správnou číslicí. Určete součet číslic výsledného součinu.

$$\begin{array}{r}
* * * \\
\times \quad 1 * * \\
\hline
2\,2 * * \\
9\,0 * \phantom{*} \\
* * 2 \phantom{**} \\
\hline
5\,6 * * *
\end{array}$$

(A) 16 (B) 20 (C) 26
(D) 30 (E) jiná odpověď

**19.** Pro reálná čísla $x$, $y$, $z$ platí $x + y + z = 1$ a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Hodnota $x^2 + y^2 + z^2$ je:

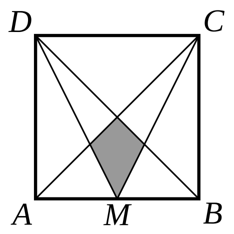
(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) není možno ji určit

**20.** Pro první člen posloupnosti $(a_n)$ platí $a_1 = 0$. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 1$ dále platí $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$. Pro které $k$ platí $a_k = 2008$?

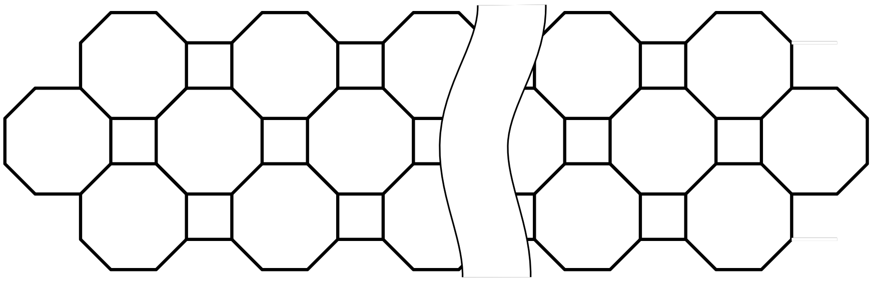
(A) 2008 (B) 2009 (C) 4017 (D) 4018 (E) jiná odpověď

**21.** Bod $M$ je středem strany $AB$ jednotkového čtverce $ABCD$. Určete obsah šedě vyznačeného obrazce.

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{2}{13}$




**22.** Ze sirek jsme poskládali zajímavý ornament, ve kterém je 61 osmiúhelníků (viz obrázek). Kolik sirek jsme použili?



(A) 488 (B) 408 (C) 328 (D) 244 (E) 446

**23.** Právě dva dělitelé čísla $3^{32} - 1$ jsou současně větší než 75 a menší než 85. Jejich součin je:

(A) 5852 (B) 6560 (C) 6804 (D) 6888 (E) 6972

**24.** Pro libovolné reálné číslo $x$ označme $\sin x + \cos x = m$. Vyjádřete $\sin^4 x + \cos^4 x$.

(A) $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$ (B) $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$ (C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ (D) $m^4$ (E) $m^4 + 1$