

Matematický KLOKAN 2007
kategorie **Student**

Úlohy za 3 body

1. Tři chlapi mají dohromady 30 míčů. Pokud by Běďa dal 5 míčů Cyrilovi, Cyril dal 4 míče Adamovi a Adam dal 2 míče Běďovi, bude mít každý chlapec stejný počet míčů. Kolik míčů má Adam?

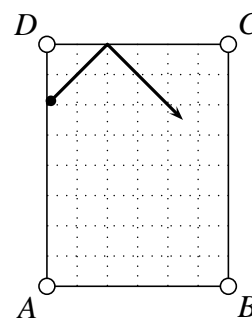
- (A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13

2. Které z následujících hodnot je roven podíl $\frac{\sin 1^\circ}{\cos 89^\circ}$?

- (A) 0 (B) $\text{tg } 1^\circ$ (C) $\text{cotg } 1^\circ$ (D) $\frac{1}{89}$ (E) 1

3. Kulečnicková koule se odráží od mantinelů pod úhlem 45° tak, jak vidíte na obrázku. Do které kapsy spadne?

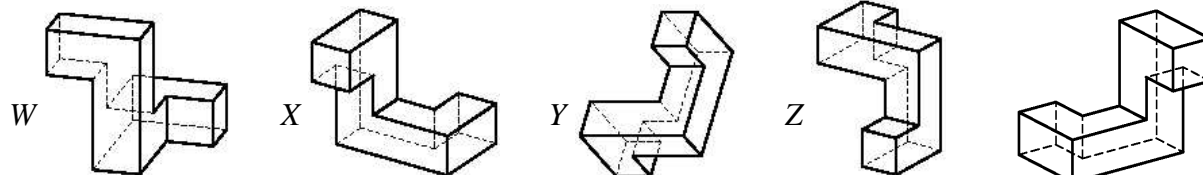
- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) do žádné



4. Aby student uspěl při přijímacích zkouškách na univerzitu, musí správně odpovědět alespoň na 80 % otázek. Po přijímacích zkouškách si Petr znovu promýšlel 15 otázek. Zjistil, že správně odpověděl na 10 z nich a špatně na 5. Kdyby na všechny ostatní otázky odpověděl správně, složil by test právě na 80 %. Kolik otázek bylo v testu?

- (A) 20 (B) 25 (C) 30 (D) 35 (E) 40

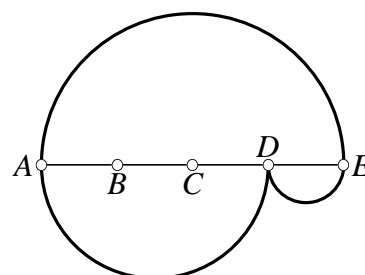
5. Dole vidíte čtyři tělesa. Která z nich jsou shodná s tělesem vpravo?



- (A) W a Y (B) X a Z (C) jen Y (D) žádné (E) W, X a Y

6. Úsečka AE je rozdělena body B, C, D na čtyři stejné části. Na obrázku vpravo jsou sestrojeny polokružnice s průměry AE, AD a DE, které vytvářejí dvě cesty z bodu A do bodu E. Vypočítejte poměr délek horní a dolní cesty.

- (A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 2 : 1 (D) 3 : 2 (E) 1 : 1

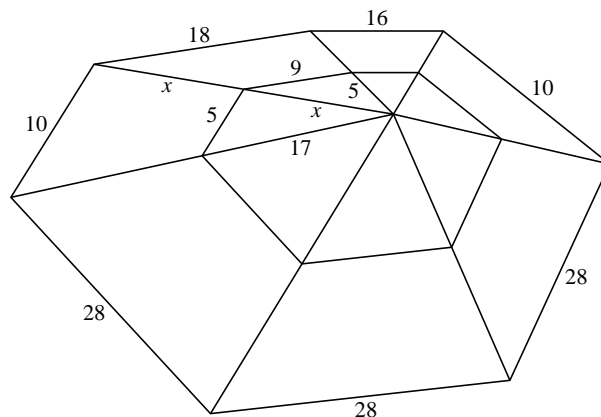


7. Na tabuli je napsáno osm po sobě jdoucích celých čísel. Součet pěti nejmenších čísel je roven součtu tří největších čísel. Najděte největší číslo, které je na tabuli napsáno.

- (A) 4 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) jiné číslo

8. Pavouk Pythagoras splétá pavučinu. Délky některých úseků jsou vyznačeny na obrázku. Délka úsečky x je vyjádřena přirozeným číslem. Určete ji.

- (A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 17 (E) 19



Úlohy za 4 body

9. Je dán jednotkový čtverec $ABCD$. Sestrojíme všechny čtverce, které mají se čtvercem $ABCD$ společné alespoň dva vrcholy. Určete obsah sjednocení všech takových čtverců.

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

10. Kladné číslo β je o 25 % menší než číslo γ a o 50 % větší než číslo α . O kolik procent je číslo γ větší než číslo α ?

- (A) o 25 (B) o 50 (C) o 75 (D) o 100 (E) o 125

11. Celá čísla x a y vyhovují rovnici $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$. Najděte x .

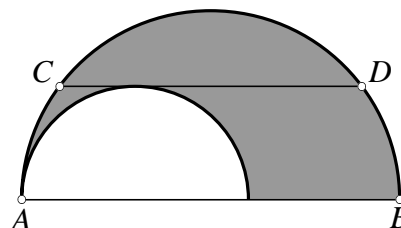
- (A) 0 (B) 3 (C) -1 (D) 1 (E) 2

12. Vypočtěte hodnotu součtu $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$.

- (A) 1 (B) π (C) 0 (D) 10 (E) -1

13. Na obrázku jsou nakresleny dvě polokružnice. Sečna CD délky 4 je rovnoběžná s průměrem AB a je tečnou menší polokružnice. Určete obsah vyznačené oblasti.

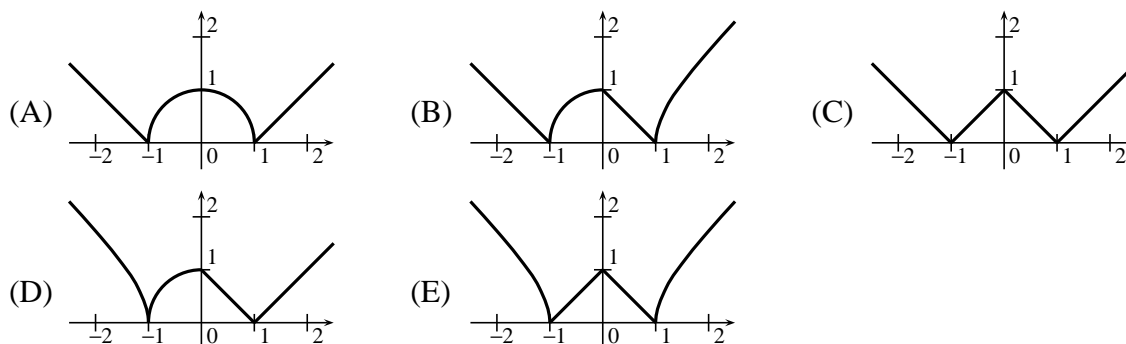
- (A) π (B) $1,5\pi$ (C) 2π
(D) 3π (E) nelze jednoznačně určit



14. Na ostrově žijí jen rytíři a lháři. Rytíři mluví vždy pravdu, lháři vždy lžou. Jednou se ostrovana A zeptali na něj a na ostrovana B . On odpověděl: „Alespoň jeden z nás dvou je lhář.“ Který z následujících výroků je pravdivý?

- (A) Žádný ostrovan nemohl danou větu vyslovit.
 (B) Ostrované A a B jsou lháři.
 (C) Ostrované A a B jsou rytíři.
 (D) Ostrovan A je lhář, zatímco B je rytíř.
 (E) Ostrovan A je rytíř, zatímco B je lhář.

15. Který z následujících grafů je grafem funkce $f(x) = \sqrt{|(1-x)(1-|x|)|}$?



16. Které z následujících čísel nelze zapsat ve tvaru $x + \sqrt{x}$, kde x je přirozené číslo?

- (A) 870 (B) 110 (C) 90 (D) 60 (E) 30

Úlohy za 5 bodů

17. Funkce f je definována takto $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$. Najděte funkci g , pro kterou platí $f(g(x)) = x$.

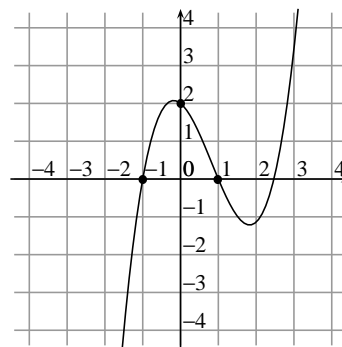
- (A) $g(x) = \frac{3x}{2x+4}$ (B) $g(x) = \frac{3x+4}{2x}$ (C) $g(x) = \frac{2x+4}{4x}$
 (D) $g(x) = \frac{4x}{2-3x}$ (E) jiná funkce

18. Délka strany kosočtverce je geometrickým průměrem délek jeho úhlopříček. Určete velikost vnitřního ostrého úhlu kosočtverce.

- (A) 15° (B) 30° (C) 45° (D) 60° (E) 75°

19. Na obrázku vidíte část grafu funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Určete číslo b .

(A) -4 (B) -2 (C) 0 (D) 2 (E) 4



20. Pro kolik reálných čísel a má kvadratická rovnice

$$x^2 + ax + 2007 = 0$$

dva celočíselné kořeny?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) jiná odpověď

21. Určete hodnotu součtu

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

(A) $\frac{999}{1000}$ (B) $\frac{99}{100}$ (C) $\frac{9}{10}$ (D) 9 (E) 1

22. Andrea, Bára a Cecilka po řadě házejí kostkou. Andrea vyhraje, když jí padne jedno z čísel 1, 2 nebo 3; Bára vyhraje, když jí padne jedno z čísel 4 nebo 5; Cecilka vyhraje, když jí padne číslo 6. Začíná házet Andrea, pokud nevyhraje, hází Bára, pokud nevyhraje, hází Cecilka, pokud nevyhraje, hází znovu Andrea, atd. dokud některá z nich nevyhraje. Určete pravděpodobnost, že vyhraje Cecilka.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{11}$ (D) $\frac{1}{13}$ (E) 0

23. Na čtverečkovaném papíru je „do spirály“ zapsána posloupnost číslic 1234512345... (viz obrázek). Která z číslic je zapsána 100 čtverečků nad vyznačeným čtverečkem (tj. mezi nimi je právě 99 čtverečků)?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

	1	2	3	·	·
	5	2	3	4	5
	4	1	1	2	1
	3	5	4	3	2
	2	1	5	4	3

24. Rostoucí posloupnost 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... obsahuje všechny celé nezáporné mocniny čísla 3 a všechna čísla, která se dají vyjádřit jako součet navzájem různých celých nezáporných mocnin čísla 3. Určete stý člen této posloupnosti.

(A) 150 (B) 981 (C) 1 234 (D) 2 401 (E) 3^{100}