Matematický KLOKAN 2006
kategorie **Student**
(pro 3. a 4. roč. SŠ a septimu a oktávu osmiletých gymnázií)

Vážení přátelé,

v následujících 75 minutách vás čeká stejný úkol jako mnoho vašich vrstevníků v řadě dalších evropských zemí.

V níže uvedeném testu je zadáno čtyřiadvacet úloh. Vašim úkolem je u každé z nich vybrat z nabízených možností vždy právě jednu, kterou pokládáte za správnou. Svou volbu vyznačte v přiložené kartě odpovědí. Za správné řešení úlohy 1–8 vám přidělím 3 body, za správné řešení úlohy 9–16 body 4 a konečně za správné řešení úlohy 17–24 bodů 5. Za neřešenou úlohu (není zaškrtnuta žádná z možných odpovědí) nezískáte žádný bod. Za úlohu chybně vyřešenou ztratíte 1 bod. Na začátek vám přiděluji 24 bodů. Můžete tedy získat maximálně 120 bodů.

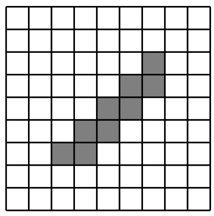
Při řešení úloh **nepovoluji** používání kapesního kalkulátoru, matematických tabulek, učebnic ani žádné jiné matematické literatury.

Váš KLOKAN.

Úlohy za 3 body

1. Kolik nul je na konci zápisu součinu prvních 2006 prvočísel v desítkové soustavě?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 9 (E) 26



2. Ve čtvercové síti vpravo je vybarven mnohoúhelník. Určete největší počet čtverců, které můžeme ještě vybarvit, aby se obvod mnohoúhelníku nezvětšil.

(A) 0 (B) 7 (C) 12 (D) 16 (E) 18

3. Na trati se míjejí dva protijedoucí vlaky stejné délky. První jede rychlostí $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, druhý $120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Cestující ve druhém vlaku vidí první vlak vedle sebe po dobu 6 s. Určete dobu, po kterou vidí cestující z prvního vlaku vedle sebe druhý vlak.

(A) 5 s (B) 6 s (C) mezi 6 a 7 *s* (D) 7 s (E) více než 7 *s*

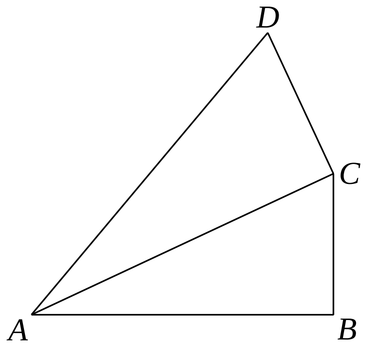
4. Určete hodnotu součinu xy, jestliže platí $4^x = 9$ a $9^y = 256$.

(A) 4 (B) 10 (C) 36 (D) 48 (E) 2006

5. Uvažujme všechna devítimístná čísla, jejichž zápis v desítkové soustavě obsahuje každou z číslic 1, 2, 3, …, 9. Každé takové číslo napíšeme na zvláštní list papíru a všechny listy umístíme do krabice. Určete nejmenší počet listů, které musíme z krabice vytáhnout, aby mezi nimi existovaly vždy dva listy, na kterých jsou napsána čísla se stejnou počáteční číslicí.

(A) 9 (B) 10 (C) 72 (D) 8! (E) 9!

6. Délka úsečky AB na obrázku je 1, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ACD| = 90^\circ$ a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAD| = \delta$. Určete délku úsečky AD.



(A) $\cos\delta + \operatorname{tg}\delta$ (B) $\cos 2\delta$ (C) $\dfrac{1}{\cos 2\delta}$

(D) $\cos^2\delta$ (E) $\dfrac{1}{\cos^2\delta}$

7. Která z následujících funkcí má graf symetrický podle osy y?

(A) $y = x^2 + x$ (B) $y = x^2 \sin x$ (C) $y = x\cos x$ (D) $y = x\sin x$ (E) $y = x^3$

8. V osudí spravedlivé rulety je 37 čísel: celá čísla od 0 do 36. Určete pravděpodobnost, že bude taženo prvočíslo.

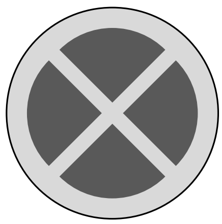
(A) $\dfrac{5}{18}$ (B) $\dfrac{11}{37}$ (C) $\dfrac{11}{36}$ (D) $\dfrac{12}{37}$ (E) $\dfrac{1}{3}$

Úlohy za 4 body

9. Zbytek při dělení čísla 1001 jednomístným číslem je 5. Určete zbytek při dělení čísla 2006 stejným jednomístným číslem.

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

10. Poloměr dopravní značky je 20 cm. Každá z tmavých částí je čtvrtkruh. Obsah světlé části značky je roven obsahu kruhu složeného ze čtyř tmavých částí značky. Určete jeho poloměr.

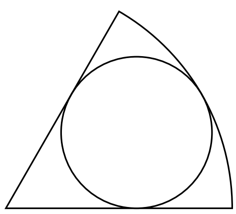


(A) 20/3 cm (B) $4\sqrt{5}$ cm (C) 10 cm (D) 12,5 cm (E) $10\sqrt{2}$ cm

11. Nechť $a > b > c$ jsou taková prvočísla, že $a + b + c = 78$ a $a - b - c = 40$. Určete hodnotu součinu abc.

(A) 590 (B) 1062 (C) 1239 (D) 2006 (E) 2166

12. Poměr poloměrů kruhové výseče a kruhu jí vepsaného je 3:1. Určete poměr jejich obsahů.



(A) 3:2 (B) 4:3 (C) 5:3 (D) 6:5 (E) 5:4

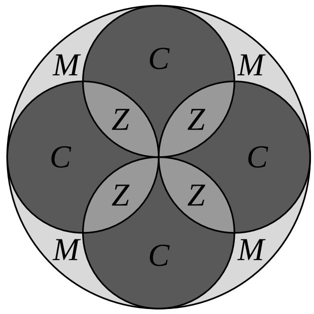
13. Volejbalového turnaje se zúčastnilo sedmnáct družstev. Každé družstvo hrálo s každým jiným právě jednou. Vítězný celek získal 1 bod, poražený 0 bodů, žádný zápas neskončil remízou. Po sehrání všech zápasů vytvořily body dosažené jednotlivými týmy aritmetickou posloupnost. Kolik bodů získalo družstvo na posledním místě?

(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) Jiný počet bodů. (E) Popsaná situace je nemožná.

14. Vloni bylo ve školním pěveckém sboru o 30 chlapců více než dívek. Letos se počet všech členů sboru zvětšil o 10 %, z toho se počet chlapců zvětšil o 5 % a počet dívek se zvětšil o 20 %. Kolik členů je ve sboru letos?

(A) 88 (B) 99 (C) 110 (D) 121 (E) 132

15. Obrázek vpravo znázorňuje kostelní okno tvaru rozety. Písmena C, Z a M značí po řadě červené, zelené a modré sklo. Při výrobě tohoto okna bylo použito $400\,\mathrm{cm}^2$ zeleného skla. Kolik cm^2 modrého skla bylo použito?



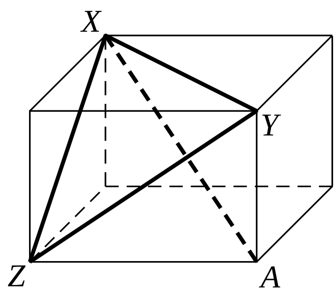
(A) 120π (B) 382 (C) 396 (D) $90\sqrt{2}\,\pi$ (E) 400

16. Nechť a a b jsou reálná čísla větší než 1. Který z následujících zlomků je největší?

(A) $\dfrac{a}{b-1}$ (B) $\dfrac{a}{b+1}$ (C) $\dfrac{2a}{2b+1}$ (D) $\dfrac{2a}{2b-1}$ (E) $\dfrac{3a}{3b+1}$

Úlohy za 5 bodů

17. Délky stran trojúhelníku XYZ jsou $8\,\mathrm{cm}$, $9\,\mathrm{cm}$ a $\sqrt{55}\,\mathrm{cm}$. Určete délku tělesové úhlopříčky XA kvádru na obrázku vpravo.



(A) $\sqrt{90}\,\mathrm{cm}$ (B) $10\,\mathrm{cm}$ (C) $\sqrt{120}\,\mathrm{cm}$
(D) $11\,\mathrm{cm}$ (E) $\sqrt{200}\,\mathrm{cm}$

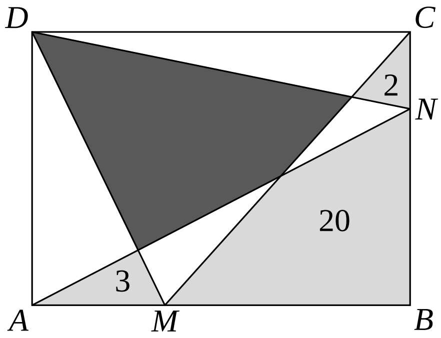
18. Určete počet všech reálných čísel b, pro něž má rovnice $x^2 - bx + 80 = 0$ dva různé kořeny v množině sudých přirozených čísel.

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) nekonečně mnoho

19. V kolika neprázdných podmnožinách množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ se součet nejmenšího a největšího prvku rovná 13?

(A) 1024 (B) 1175 (C) 1365 (D) 1785 (E) 4095

20. Na stranách AB, BC pravoúhelníku $ABCD$ jsou dány body M a N. Pravoúhelník je rozdělen několika úsečkami podle obrázku. Čísla udávají obsahy odpovídajících světle vyznačených částí. Určete obsah tmavě vyznačeného čtyřúhelníku.

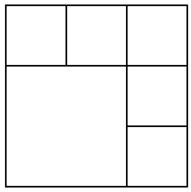


(A) 19 (B) 20
(C) 21 (D) 25
(E) Nelze jednoznačně určit.

21. Jarda smazal právě jedno z deseti po sobě jdoucích přirozených čísel napsaných na tabuli. Součet zbývajících devíti čísel je 2006. Které číslo Jarda smazal?

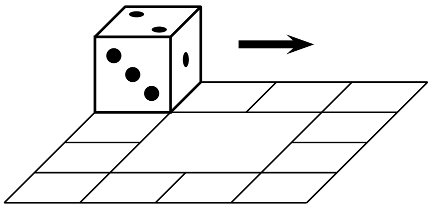
(A) 218 (B) 219 (C) 221 (D) 224 (E) 229

22. Kolika způsoby můžeme vepsat do schématu vpravo všechna čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6 (každé do jednoho čtverce) tak, aby rozdíl čísel v každých dvou sousedních čtvercích byl různý od 3? (Dva čtverce nazveme sousední, pokud množina jejich společných bodů je úsečka.)



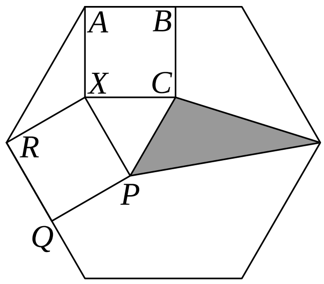
(A) $3 \cdot 5^2$ (B) $3 \cdot 2^5$ (C) 6^3 (D) $2 \cdot 3^5$ (E) 3^6

23. Kostku na obrázku překlápíme po vyznačeném okruhu sestávajícím ze 12 čtverců. Určete nejmenší kladný počet okruhů, po kterých se kostka dostane opět do výchozí pozice, tj. všechny stěny kostky budou orientovány stejně jako na počátku.



(A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) Kostka se do výchozí pozice nikdy nedostane.

24. Na obrázku je pravidelný šestiúhelník se stranou délky $\sqrt{3}$, přitom $XABC$ a $XPQR$ jsou čtverce. Určete obsah vyznačeného trojúhelníku.



(A) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\dfrac{5-\sqrt{3}}{4}$ (D) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ (E) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$