Matematický KLOKAN 2005
kategorie **Student**
(pro 3. a 4. roč. SŠ a septimu a oktávu osmiletých gymnázií)

Vážení přátelé,

v následujících 75 minutách vás čeká stejný úkol jako mnoho vašich vrstevníků v řadě dalších evropských zemí.

V níže uvedeném testu je zadáno čtyřiadvacet úloh. Vaším úkolem je u každé z nich vybrat z nabízených možností vždy právě jednu, kterou pokládáte za správnou. Svou volbu vyznačte v přiložené kartě odpovědí. Za správné řešení úlohy 1–8 vám přidělím 3 body, za správné řešení úlohy 9–16 body 4 a konečně za správné řešení úlohy 17–24 bodů 5. Za neřešenou úlohu (není zaškrtnuta žádná z možných odpovědí) nezískáte žádný bod. Za úlohu chybně vyřešenou ztratíte 1 bod. Na začátek vám přiděluji 24 bodů. Můžete tedy získat maximálně 120 bodů.

Při řešení úloh **nepovoluji** používání kapesního kalkulátoru, matematických tabulek, učebnic ani žádné jiné matematické literatury.

Váš KLOKAN.

Úlohy za 3 body

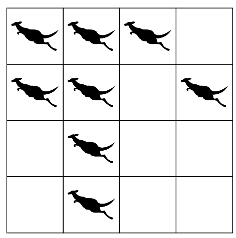
1. Pro kterou z následujících hodnot x nabývá výraz $\dfrac{x^2}{x^3}$ nejmenší hodnoty?

(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 2 (E) 3

2. Určete přirozené číslo n, pro které platí $888 \cdot 111 = 2 \cdot (2 \cdot n)^2$.

(A) 8 (B) 11 (C) 22 (D) 111 (E) 444

3. Osm klokanů je rozmístěno v tabulce podle obrázku. Libovolný klokan může skočit na libovolné volné pole. Určete nejmenší počet skoků, po kterých mohou být v každém řádku a každém sloupci tabulky právě dva klokani.

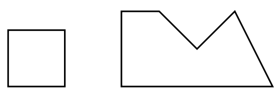


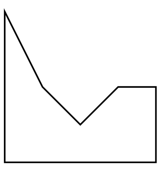
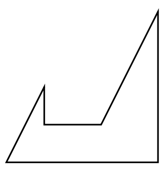
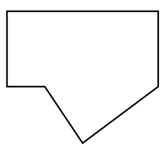
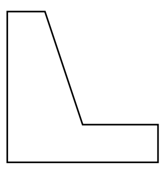
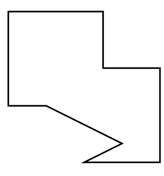
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4. Které z následujících čísel není součtem čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel?

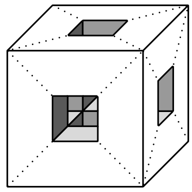
(A) 2002 (B) 22 (C) 202 (D) 222 (E) 220

5. Čtvercový list papíru byl rozstřižen na tři díly. Dva z nich jsou na obrázku vpravo. Na jednom z následujících obrázků vidíte třetí díl. Na kterém?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

6. Do zlaté krychle 3×3×3, která váží 810 g, jsou vyfrézovány tři otvory, každý tvaru kvádru 3×1×1, podle obrázku. Určete hmotnost takto vzniklého tělesa.

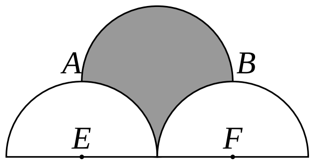


(A) 540 g (B) 570 g (C) 600 g (D) 630 g (E) 660 g

7. Nechť $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je taková funkce, že pro každé reálné číslo x platí $f(x+1) = 2f(x) - 2002$. Určete hodnotu $f(2004)$, jestliže $f(2005) = 2008$.

(A) 2004 (B) 2005 (C) 2008 (D) 2010 (E) 2016

8. Na obrázku jsou znázorněny tři shodné polokružnice o poloměru 2 cm. Určete obsah (v cm^2) vybarvené oblasti, víte-li, že E a F jsou středy dolních polokružnic a $ABFE$ je obdélník.



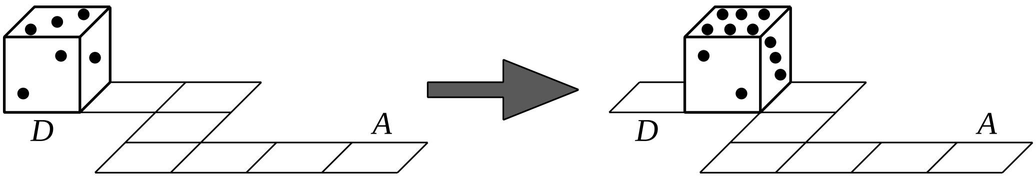
(A) 2π (B) 7 (C) $2\pi + 1$ (D) 8 (E) $2\pi + 2$

Úlohy za 4 body

9. Jindřiška natřela každou stěnu shodných dřevěných krychlí buď bílou, nebo černou barvou. Přitom na každou krychli použila obě barvy. Kolik různě natřených krychlí mohla nejvýše získat?

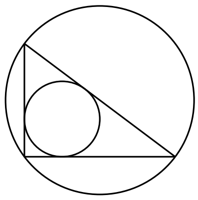
(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 52 (E) 64

10. Součet bodů na protilehlých stěnách hrací kostky je vždy sedm. Kostku překlápíme podle obrázku. V počáteční poloze D jsou na horní stěně tři body. Kolik bodů bude na horní stěně v koncové poloze A?



(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

11. Nechť d, D jsou průměry kružnice vepsané, resp. opsané pravoúhlému trojúhelníku. Vyjádřete hodnotu $d + D$ pomocí délek a a b jeho odvěsen.



(A) $a + b$ (B) $2(a + b)$ (C) $\frac{1}{2}(a + b)$ (D) $\sqrt{ab}$ (E) $\sqrt{a^2 + b^2}$

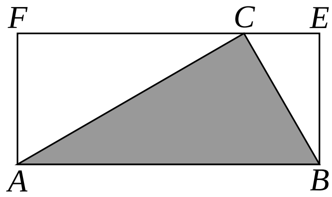
12. Která z následujících množin je množinou všech reálných čísel x, pro něž platí $2^{4^x} < 4^{2^x}$?

(A) $(-\infty, 1)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
(D) $(0, \infty)$ (E) $(-\infty, \infty)$

13. Dvě nádoby stejného objemu jsme naplnili vodou a džusem. Poměr vody a džusu byl v první nádobě 2:1, ve druhé 4:1. Poté jsme slili obsahy těchto dvou nádob do jedné velké. Určete, jaký je v ní poměr vody a džusu.

(A) 3:1 (B) 6:1 (C) 11:4 (D) 5:1 (E) 8:1

14. Nechť bod C leží na straně EF obdélníku $ABEF$. Úhly ACF a CBE jsou shodné a platí $|FC| = 6$, $|CE| = 2$. Určete obsah trojúhelníku ABC.

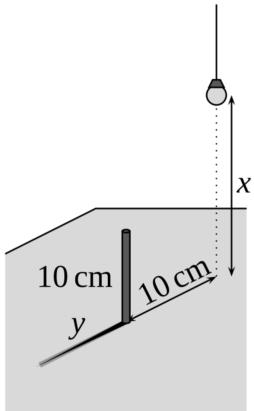


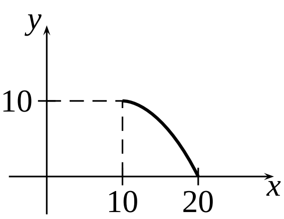
(A) $8\sqrt{2}$ (B) 12 (C) $8\sqrt{3}$
(D) 16 (E) jiná hodnota

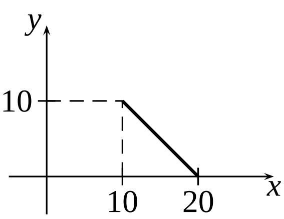
15. Karel mluví jen pravdu každý druhý den, ostatní dny jen lže. Dnes pronesl právě čtyři z uvedených vět. Kterou větu nemohl dnes vyslovit?

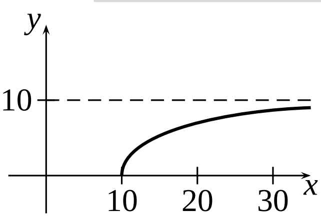
(A) Mám dohromady prvočíselný počet kamarádů a kamarádek.
(B) Mám stejný počet kamarádů jako kamarádek.
(C) Alespoň tři z mých kamarádů a kamarádek jsou starší než já.
(D) Číslo 288 je dělitelné 12.
(E) Vždy říkám pravdu.

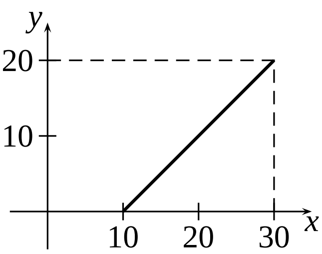
16. Ve výšce 10 cm nad stolem je zavěšena svítící žárovka. Na stole 10 cm od ní stojí 10 cm vysoká tužka, která vrhá na stůl stín. Žárovka se začne pohybovat směrem vzhůru. Který z následujících grafů znázorňuje závislost délky y stínu tužku na výšce x žárovky nad stolem?

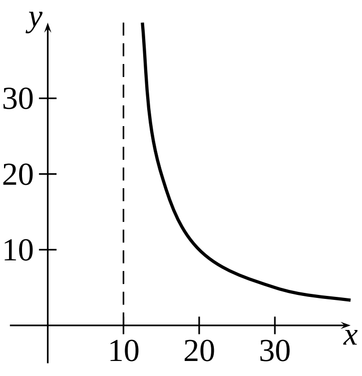


(A)


(B)


(C)


(D)


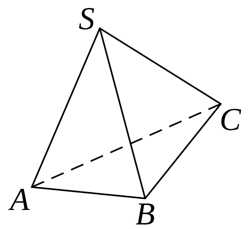
(E)


Úlohy za 5 bodů

17. Součet všech číslic zápisu čísla m v desítkové soustavě je 30. Které z následujících čísel nemůže nikdy být součtem všech číslic čísla $m + 3$ zapsaného v desítkové soustavě?

(A) 6 (B) 15 (C) 21 (D) 24 (E) 33

18. Hrany *SA*, *SB*, *SC* čtyřstěnu *SABC* jsou po dvou navzájem kolmé. Obsahy stěn *SAB*, *SAC* a *SBC* jsou po řadě rovny 3, 4 a 6. Určete objem čtyřstěnu *SABC*.



(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 12

19. V urně je 17 míčků s čísly $5 + k \cdot 125$, kde $k = 0, 1, 2 \ldots, 16$, tj. s čísly 5, 130, 255, 380, 505, …, 1755, 1880, 2005. Určete nejmenší číslo *m* tak, abychom mezi *m* z urny náhodně vybranými míčky mohli vždy najít takovou dvojici míčků, že součet jejich čísel je 2010.

(A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 17

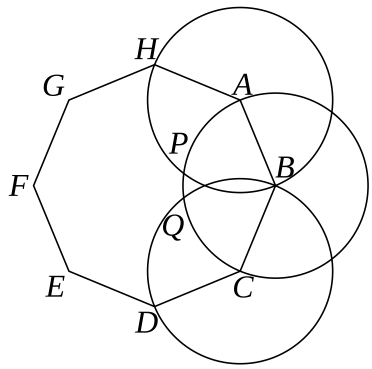
20. Pomocí čísla $n = \log\left(\sqrt{2005} + \sqrt{1995}\right)$ vyjádřete číslo $\log\left(\sqrt{2005} - \sqrt{1995}\right)$.

(A) $n - 1$ (B) $1 - n$ (C) $\frac{1}{n}$
(D) $n + 1$ (E) z daných informací nelze jednoznačně určit

21. V oboru přirozených čísel má přirozené číslo *a* právě dva dělitele a přirozené číslo *b* má právě 5 dělitelů. Kolik dělitelů má číslo *ab*?

(A) 5 (B) 6 (C) 7
(D) 10 (E) z daných informací nelze jednoznačně určit

22. Je dán pravidelný osmiúhelník *ABCDEFGH* se stranou délky 1. Body *P* a *Q* jsou průsečíky jednotkové kružnice se středem v bodě *B* s jednotkovými kružnicemi se středy v bodech po řadě *A* a *C*. Určete velikost úhlu *APQ*.

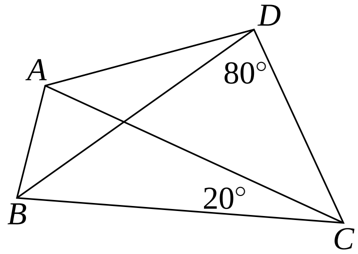


(A) $\frac{5}{8}\pi$ (B) $\frac{8}{11}\pi$ (C) $\frac{3}{4}\pi$ (D) $\frac{7}{9}\pi$ (E) $\frac{19}{24}\pi$

23. Na počátku je dáno číslo. Vynásobíme ho dvěma, od výsledku odečteme číslo 1 a tím získáme nové číslo. Tento postup zopakujeme ještě 98krát a dostaneme číslo $2^{100} + 1$. Které číslo bylo na počátku?

(A) 1 (B) 2 (C) 4
(D) 6 (E) žádné z předcházejících

24. Úhlopříčka *BD* je osou úhlu *ABC* konvexního čtyřúhelníku *ABCD* a platí $|AC| = |BC|$. Velikost úhlu *BDC* je $80°$ a velikost úhlu *ACB* je $20°$. Určete velikost úhlu *BAD*.



(A) 90° (B) 100° (C) 110° (D) 120° (E) 135°